

Eine virtuelle Bibliothek mit interaktiven statistischen Experimenten und Datenvisualisierungen

HANS-JOACHIM MITTAG, WETTER/RUHR, UND TOBIAS AUGUSTIN, HAGEN

Zusammenfassung: *Vorgelegt wird eine virtuelle Bibliothek mit aktuell über 30 voneinander unabhängigen „Mini-Lernwelten“. Mit den granularen Lernobjekten lassen sich statistische Methoden und Modelle sowie ausgewählte gesellschaftsrelevante Daten interaktiv visualisieren. Die als Web-App angelegte Bibliothek eignet sich nicht nur für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Da Entscheidungen in allen Bereichen gesellschaftlichen Lebens zunehmend aus Daten abgeleitet werden und die App eine kritische Rezeption von Daten anregt, ist sie auch für den sozialwissenschaftlichen Unterricht sowie für die Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften attraktiv.*

1 Einleitung

Seit 2019 wird von den Autoren eine virtuelle Bibliothek mit interaktiven Lernobjekten zur Statistik entwickelt. Die in einer kostenfrei zugänglichen Web-App zusammengefassten Elemente der Bibliothek ermöglichen es, elementare statistische Methoden und Modelle sowie ausgewählte gesellschaftsrelevante Daten der Statistik zu visualisieren. Jedes Lernobjekt ist direkt adressierbar, in sich abgeschlossen und auf allen technischen Plattformen einsetzbar, insbesondere auf mobilen Endgeräten.

2 Design und Granularität der Web-App

Die im September 2020 mit einem Comenius EduMedia Award ausgezeichnete Web-App mit über 30 „Mini-Lernwelten“ ist in fünf Teilbibliotheken gegliedert (Abb. 1). Die Elemente der ersten drei Bereiche sollen statistische Methodenkompetenz, die der vierten Gruppe eine kritische Rezeption und Interpretation interessanter amtlicher Daten fördern. Der letzte Bereich enthält interaktive Übungsaufgaben zur Verständnissicherung.

Die Unabhängigkeit und direkte Adressierbarkeit der Lernobjekte hat mehrere Vorteile. Lehrende können einzelne Elemente der App herausgreifen und diese flexibel zur Ergänzung unterschiedlicher Lehr- und Lernszenarien verwenden. Jedes Element lässt sich z. B. im Präsenzunterricht auf digitalen Tafeln präsentieren, via QR-Code mit Aufgabenblättern verknüpfen oder im Distanzunterricht einsetzen. Die

Granularität der App erleichtert zudem deren Pflege und Nachhaltigkeitssicherung – einzelne Lernobjekte lassen sich aktualisieren (etwa Einbindung neuer Daten oder Implementierung neuer Funktionalitäten), ohne dass andere Elemente davon berührt werden.

3 Förderung von Methodenkompetenz

Die Lernobjekte zur Förderung statistischer Methodenkompetenz (Statistical Literacy) sind sowohl für den Statistik-/Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II attraktiv als auch für die Aus- und Fortbildung der hier eingesetzten Lehrkräfte. Sie sind betont übersichtlich gestaltet und selbsterklärend.

Für den Mathematikunterricht ist der Einsatz digitaler Werkzeuge – etwa von grafikfähigen Taschenrechnern oder der dynamischen Software GeoGebra – nicht neu. Während aber bei diesen Werkzeugen vor der Realisierung eines Experiments/einer Simulation eine Vertrautheit mit der Handhabung des Geräts bzw. der Software gegeben sein muss, ist man bei Verwendung der durchweg intuitiv nutzbaren Lernobjekte sofort auf der inhaltlichen Ebene. Ziel ist stets die experimentgestützte Vermittlung eines Grundverständnisses für elementare statistische Konzepte (z. B. Lage-, Zusammenhangs- oder Konzentrationsmaße) und Verteilungsmodelle (u. a. Binomial- und Normalverteilung) anhand interaktiver Visualisierung.

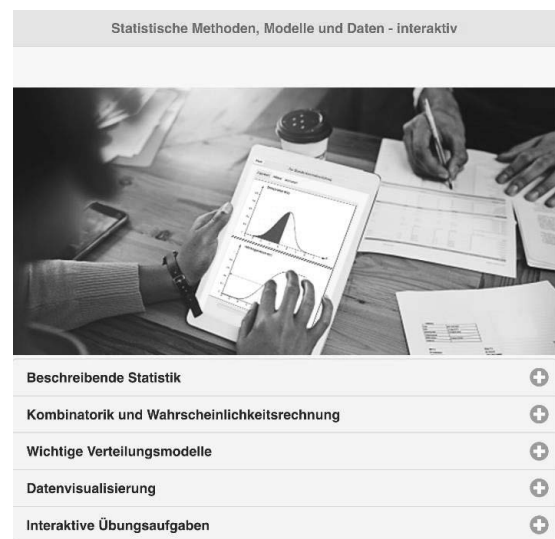


Abb. 1: Eingangsportale der virtuellen Bibliothek (<https://stat.iks-hagen.de/app/>)

Die App stellt bewusst kein detailliertes theoretisches Hintergrundwissen bereit und ist auch nicht als Werkzeug zur Verarbeitung eigener Datensätze angelegt. Statistische Theorie findet man ja zuhauf in einführenden Lehrbüchern für Hochschulen und, in geringerer Tiefe, in Schullehrwerken. Für die Auswertung eigener Datensätze muss auch kein neues Werkzeug erfunden werden. Hier kommen Excel oder die freie Statistiksoftware R in Betracht; im schulischen Bereich ist GeoGebra verbreitet. Die Lernobjekte zielen also nicht auf die Substitution bewährter Bausteine von Blended-Learning-Modellen ab. Sie sind vielmehr *zusätzliche* Bausteine solcher Modelle. Die Elemente der Web-App haben primär propädeutischen Charakter. Sie sollen entdeckendes Lernen ermöglichen und als Ausgangspunkt für weiterführende Fragestellungen und Analysen dienen.

Experimente und Simulationen – Beispiele

Das in Abb. 2 wiedergegebene Experiment simuliert den n -fachen Wurf einer fairen Münze. Für die Länge n der Wurfserie wurde hier $n = 500$ gewählt. Der Wert n ist aber veränderbar. Nach Aktivierung von „Start“ baut sich dynamisch ein Pfad auf, der die relative Häufigkeit von „Zahl“ nach j Würfeln zeigt; $j = 1, \dots, n$. Dabei lässt sich die stochastische Konvergenz des Anteils der Ausgänge mit „Zahl“ gegen 0,5 beobachten und zwar umso deutlicher, je größer n gewählt ist. Wenn eine neue Wurfserie angestoßen wird, bleibt der Häufigkeitspfad der letzten Serie im Hintergrund sichtbar. Für beide Wurfserien wird die relative Häufigkeit von „Zahl“ nach n Würfeln auch numerisch ausgewiesen.

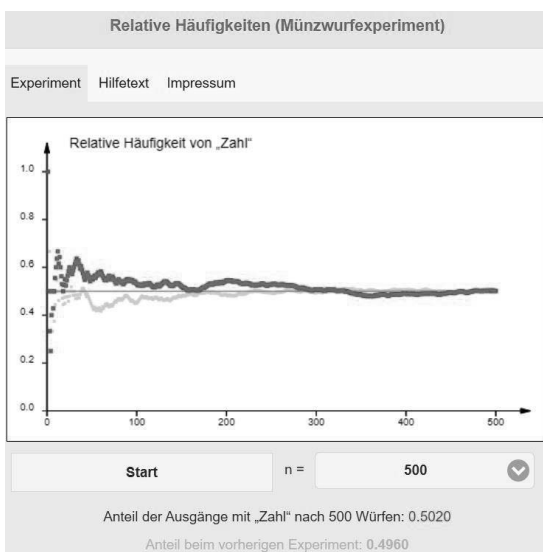


Abb. 2: Ergebnispfade zweier Münzwurfserien (<https://stat.iks-hagen.de/app/muenzwurf/>)

Die Simulation legt das Vorhandensein einer Gesetzmäßigkeit nahe (Gesetz der großen Zahlen). Das Experiment wirft somit Fragen auf, die sich anschließend im Unterricht vertieft behandeln lassen.

Abb. 3 zeigt ein virtuelles Experiment, bei dem mit einem fairen Würfel n -mal gewürfelt wird, wobei n veränderbar ist. Man erkennt, dass sich die Längen der hier hellgrau wiedergegebenen Stäbe, die die relativen Häufigkeiten für die sechs Augenzahlen repräsentieren, mit zunehmendem n tendenziell angleichen. Dies legt die diskrete Gleichverteilung als Erklärungsmodell nahe (schwarze Stäbe).

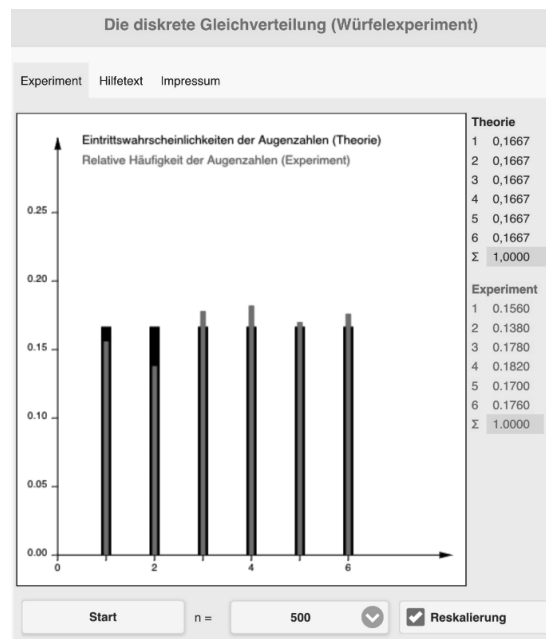


Abb. 3: Würfelexperiment und Modell der Gleichverteilung (<https://stat.iks-hagen.de/app/gleichverteilung/>)

Das Experiment illustriert beispielhaft, dass sich empirische Phänomene (hier: die empirische Verteilung der Augenzahlen bei einer Serie von n Würfeln) unter bestimmten Voraussetzungen (hier: hinreichend groß gewähltes n) sehr gut durch statistische Modelle beschreiben lassen.

Das in Abb. 4 wiedergegebene Experiment ermöglicht es, die in Anhängen von Schullehrwerken üblicherweise in Tabellenform präsentierten Werte der Binomialverteilung (genauer: Werte der Wahrscheinlichkeits- oder Verteilungsfunktion einer Binomialverteilung) auch inhaltlich zu interpretieren und die Auswirkung einer Veränderung der Modellparameter n und p zu studieren.

Die Summe der im oberen Teil von Abb. 4 durch hellgraue Stäbe repräsentierten Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Binomialverteilung bis

zum Punkt x entspricht dem Wert der Verteilungsfunktion der betrachteten Binomialverteilung an der Stelle x . Dieser Wert ist im unteren Abbildungsteil durch einen auf die Ordinatenachse weisenden Pfeil markiert und auch numerisch ausgewiesen. Der Wert der Argumentvariablen x lässt sich über einen Schieber verändern und wird neben dem Schieber angezeigt. Die Variation der Parameter n und p erfolgt über zwei oberhalb der Grafik platzierte Menüfelder.

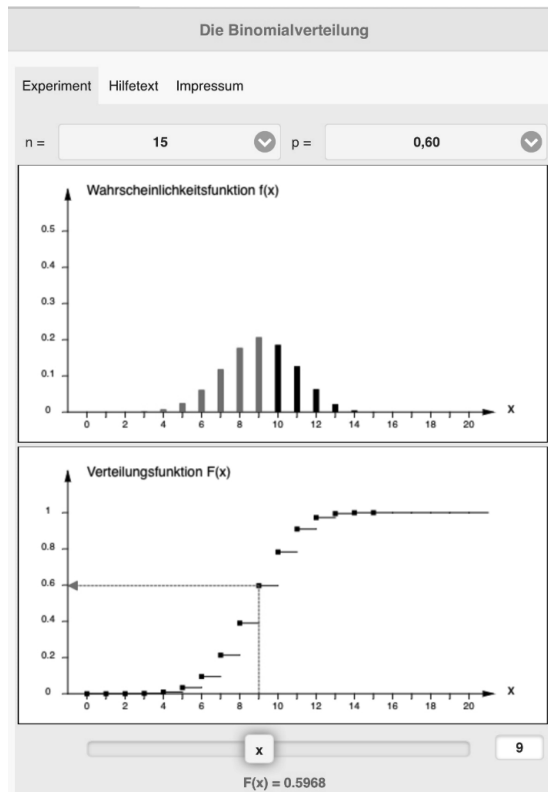


Abb. 4: Interaktive Visualisierung der Binomialverteilung (<https://stat.iks-hagen.de/app/binomial/>)

Unter dem Eindruck der COVID-19-Pandemie wurde ein interaktives Lernobjekt zur Sensitivität und Spezifität medizinischer Tests realisiert, das einen attraktiven Einstieg in den Themenkomplex „Bedingte Wahrscheinlichkeiten“ bietet (Abb. 5). Der Test kann z. B. ein Antikörpertest auf COVID-19 sein, ein Streptokokkentest bei Scharlachverdacht oder ein spezieller Test zum Ausschluss einer bestimmten Krebserkrankung.

Das Lernobjekt zeigt eine Vierfeldertafel für absolute Häufigkeiten. Diese beziehen sich auf die Merkmale „wahrer Gesundheitsstatus einer Person“ (Ausprägungen „krank/infiziert“ versus „gesund“) sowie „Ergebnis eines medizinischen Diagnoseverfahrens/Tests“ (Ausprägungen „positiv“ versus „negativ“).

Für die Grundgesamtheit der zu testenden Personen wird ein fester Wert gewählt (100.000 Personen). Der als Prävalenz bezeichnete Anteil der Kranken an der betrachteten Grundgesamtheit ist veränderbar (Voreinstellung: 5.000 Personen, also 5 % der Grundgesamtheit).

Unter der Vierfeldertafel stehen vier bedingte Wahrscheinlichkeiten, die sich jeweils durch Division eines der vier Werte aus dem Inneren der Tabelle (Felder F1–F4) und einer Spalten- oder Zeilensumme errechnen (Randhäufigkeiten Z1–Z2 und S1–S2). Es sind dies die Sensitivität und Spezifität eines medizinischen Test- oder Diagnoseverfahrens sowie die Wahrscheinlichkeiten für falsch-positive sowie falsch-negative Befunde. Die Sensitivität weist aus, welcher Anteil der tatsächlich kranken Personen vom Test auch als krank identifiziert wird. Eine Sensitivität von 0,95 beinhaltet demnach, dass der Test im Mittel 95 % der tatsächlich Kranken erkennt und damit 5 % der Kranken fälschlich als gesund klassifiziert. Die Spezifität gibt hingegen den Anteil der tatsächlich Gesunden an, der vom Test auch als gesund erkannt wird. Eine Spezifität von 0,99 bedeutet, dass im Mittel 99 % der Gesunden vom Test auch als gesund erkannt und somit nur 1 % fälschlich als krank eingestuft werden.

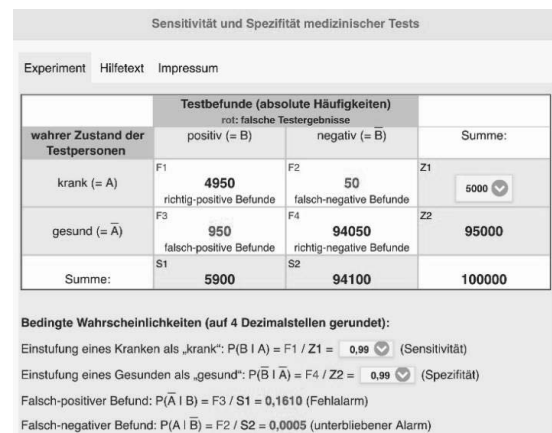


Abb. 5: Fehlentscheidungsrisiken bei niedriger Prävalenz (<https://stat.iks-hagen.de/app/medizintests/>)

Bei dem Experiment sind neben der Prävalenz auch die Sensitivität und die Spezifität des Testverfahrens variierbar. Für die Sensitivität und die Spezifität ist als Voreinstellung jeweils der Wert 0,99 gewählt, also relativ hohe Werte, mit denen z. B. die Anbieter medizinischer Tests gerne werben. Das Lernobjekt illustriert u. a., dass auch bei hohen Werten für Sensitivität und Spezifität ein sehr hoher Anteil der

positiven Testbefunde falsch-positiv sein kann, wenn die Prävalenz niedrig ist. Ändert man z. B. die voreingestellte Randhäufigkeit im Feld Z1 von 5.000 auf 500 (Senkung der Prävalenz von 5 % auf 0,5 %), sind statt 16,1 % etwa 66,8 % aller positiven Testbefunde falsch-positiv!

Eine interaktive Vierfeldertafel des in Abb. 5 wiedergegebenen Typs ergänzt die an Schulen bei der Behandlung bedingter Wahrscheinlichkeiten verwendeten *statischen* Vierfeldertafeln und Baumdiagramme. Sie stellt auch eine Alternative zu der von Binder, Krauss und Steib (2018) vorgeschlagenen, von diesen als Häufigkeitsnetz bezeichneten Visualisierung dar.

4 Förderung von Datenkompetenz

Bei den Elementen der App zur Datenvisualisierung geht es um die interaktive Exploration ausgewählter amtlicher Daten aus unterschiedlichen Sichten (Querschnitts- versus Längsschnittsicht) und unter Verwendung unterschiedlicher grafischer Darstellungen (Zeitreihengraphen, Boxplots, Balkendiagramme). Ziel ist die Befähigung der Nutzer zur kritischen Rezeption und Reflexion gesellschaftsrelevanter Daten und deren grafischer Präsentation (Data Literacy). Diese Kompetenz wird heute in den Curricula immer stärker gefordert und stand auch im Mittelpunkt des inzwischen ausgelaufenen EU-Projekts ProCivicStat – vgl. Engel, Biehler, Frischemeier et al (2019). Bei der Auswahl der Daten spielt neben der allgemeinen Relevanz auch die Seriosität der Datenproduzenten eine wichtige Rolle. Seriöse Datenproduzenten – wie etwa Eurostat oder das Statistikamt der UN – sind über einen Verhaltenskodex hohen Qualitätsstandards verpflichtet und stellen auch Meta-Daten mit Informationen zur Datengewinnung bereit.

Bei den Elementen der Teilbibliothek „Datenvisualisierung“ steht die Entdeckung von Botschaften hinter den Daten im Vordergrund, etwa die Identifikation von Trends oder des Effekts ökonomischer Maßnahmen (z. B. die Auswirkung von Steuerungsmaßnahmen der Politik zur Senkung des Anteils nicht-umweltverträglicher PKWs). Beim Vergleich von Ländern bezüglich eines Merkmals kommen manchmal alternative Merkmale als Referenzkriterien in Betracht – beim Vergleich von Militärausgaben etwa der Anteil der Ausgaben am Bruttoinlandsprodukt oder die Pro-Kopf-Ausgaben, beim Vergleich von Treibhausgasemissionen die Emissionswerte in Prozent des Niveaus von 1990 oder die Pro-Kopf-Emissionen. Je nachdem, welches Vergleichskriterium

herangezogen wird, resultieren sehr unterschiedliche Rankings.

Einige Lernobjekte zur Datenvisualisierung vergleichen Länder oder Städte hinsichtlich eines aus mehreren Sub-Indikatoren zusammengesetzten Indexes. Da Indikatoren üblicherweise im Rahmen der beschreibenden Statistik behandelt werden, sind diese Elemente in der Teilbibliothek „Beschreibende Statistik“ der App zu finden. Es wurden hier auch Lernobjekte entwickelt, bei denen die Gewichtung der Sub-Indikatoren verändert werden kann. So lässt sich illustrieren, dass eine Änderung des Gewichtungsschemas das Ranking der Länder oder Städte beeinflussen kann.

Die nachfolgenden Beispiele verdeutlichen, dass interaktive Datenvisualisierung zweifellos ein faszinierendes Instrument ist, das auch bei Nutzern, die der Mathematik eher distanziert gegenüberstehen, Interesse an statistischen Fragestellungen erzeugen und neue Einsichten befördern kann. Man muss sich aber vergegenwärtigen, dass eine interaktive Präsentation von Daten – worauf Borovcnik (2019) zu Recht hinweist – auch Ablenkungspotenzial besitzt und weitergehende Analysen nicht ersetzt.

Interaktive Datenvisualisierung – Beispiele

Beim Ländervergleich von Militärausgaben wird in der politischen Diskussion meist allein der Anteil der Militärausgaben am Bruttoinlandsprodukt als Referenzkriterium herangezogen. Hier stand im Jahr 2019 Deutschland weit unten, während arabische Staaten noch vor den USA ganz oben und China im Mittelfeld rangierten (s. Abb. 6, oben). Vergleicht man hingegen anhand der absoluten Ausgaben oder der Ausgaben pro Kopf, ergibt sich jeweils ein anderes Bild.

Das in Abbildung 6 wiedergegebene Lernobjekt wirft die Frage nach der Sachadäquatheit eines Referenzkriteriums auf. Es verdeutlicht auch, dass unterschiedliche Kriterien unterschiedliche, sich ergänzende Sichten auf dasselbe Datenmaterial eröffnen.

Ein in Abb. 7 wiedergegebenes Lernobjekt zur Entwicklung der auf dem deutschen Automarkt konkurrierenden PKW-Marken lässt erkennen, dass die im Jahr 2009 gezahlte staatliche „Abwrackprämie“ nur einen kurzzeitigen Effekt hatte und Premium-Hersteller von der Prämie nicht profitierten. Man entdeckt auch, dass die PKW-Neuzulassungszahlen im Corona-Jahr 2020 spürbar zurückgingen. Bei den Zeitreihendarstellungen werden aus Gründen der Übersichtlichkeit immer nur die Entwicklungen für

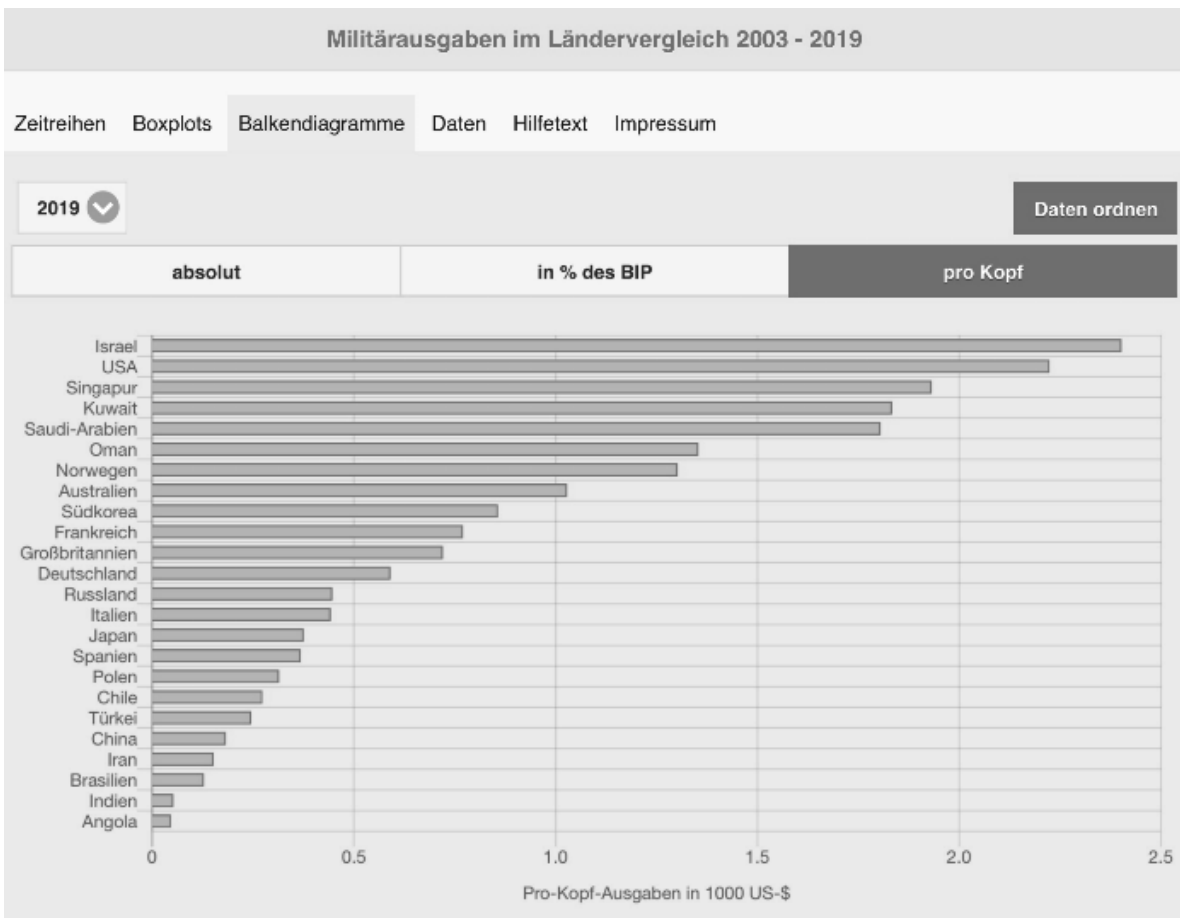


Abb. 6: Militärausgaben in % des BIP und pro Kopf (<https://stat.iks-hagen.de/app/militaer/>)

drei Marken gezeigt. Deren Zusammenstellung ist aber über Menüfelder veränderbar.

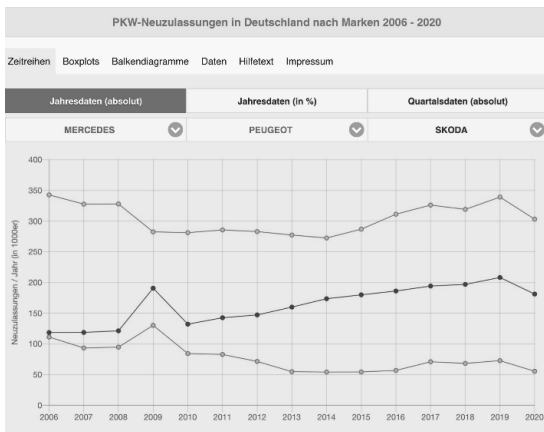


Abb. 7: Neuzulassungen für drei PKW-Marken (<https://stat.iks-hagen.de/app/pkw-marken/>)

Abb. 8 zeigt ein Element zur Entwicklung des deutschen Automarktes, das die PKW-Neuzulassungen nicht nach Marken, sondern nach Antriebsart/Energiequelle klassifiziert. Man sieht hier neben dem vo-

rübergehenden Effekt der „Abwrackprämie“ auf den Anteil von Benzinern und Diesel-PKW die Auswirkung der Dieseldiskussion, die Ende 2016 begann. Außerdem fällt die allmähliche Zunahme des Anteils von Fahrzeugen mit Hybrid- oder reinem Elektroantrieb ab 2018 ins Auge.

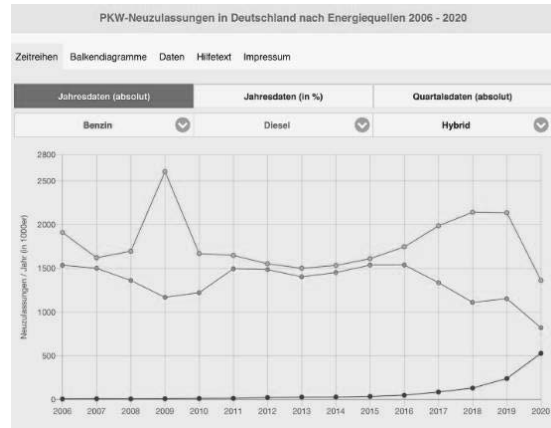


Abb. 8: Neuzulassungen für drei PKW-Antriebsarten (<https://stat.iks-hagen.de/app/pkw-antriebsart/>)

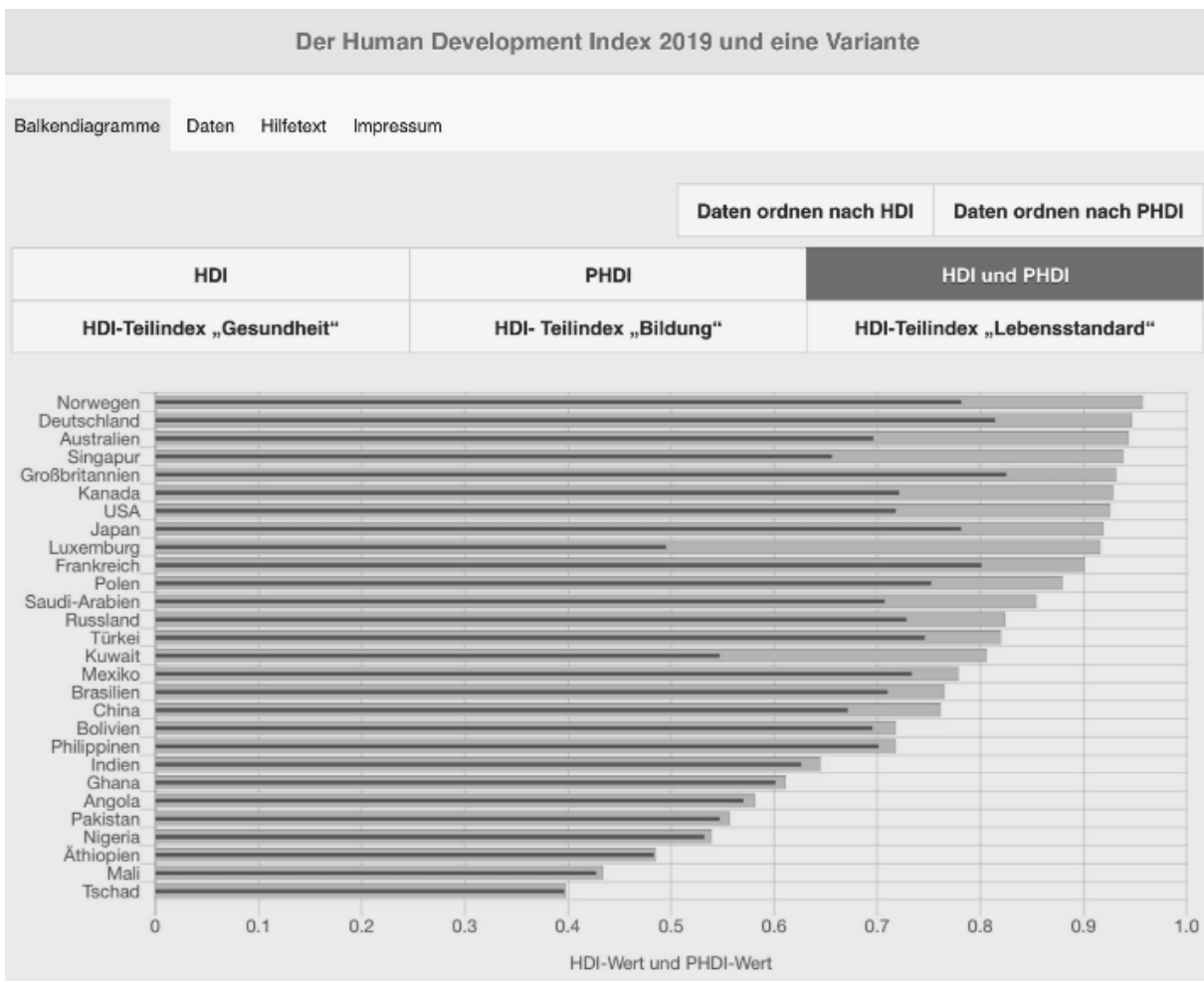


Abb. 9: HDI-Werte (hellgrau) und PHDI-Werte (dunkelgrau) 2019 für ausgewählte Länder (<https://stat.iks-hagen.de/app/hdi/>)

Abb. 9 präsentiert ein Lernobjekt zum Human Development Index (HDI) der Vereinten Nationen. Das Objekt schließt eine als Planetary-Pressures Adjusted Human Development Index (PHDI) bezeichnete Variante des HDI ein, die den ökologischen Fußabdruck eines Landes berücksichtigt. Der HDI nimmt Werte zwischen 0 und 1 an und charakterisiert den Entwicklungsstand eines Landes durch Verknüpfung von drei Sub-Indikatoren, die für die Gesundheit, den Bildungsstand und den Lebensstandard der jeweiligen Bevölkerung stehen. Der Entwicklungsstand eines Landes mit einem HDI-Wert bis etwa 0,55 gilt als niedrig, bis ca. 0,7 als mittel, bis 0,8 als hoch und oberhalb von 0,8 als sehr hoch.

Die Indizes sind gemäß $PHDI = a \cdot HDI$ verbunden. Dabei ist a ein länderspezifischer Korrekturfaktor ($0 < a < 1$), der sich aus den CO_2 -Emissionen und dem Ressourcenverbrauch ergibt. Würde ein Land keine Umweltpuren verursachen, wäre $a = 1$ und $PHDI = HDI$.

Bei einigen Ländern mit hohen HDI-Werten ist der Unterschied zum PHDI-Wert auffällig. Dies gilt insbesondere für die Länder Luxemburg, Kuwait und Singapur, allesamt Länder mit hohem Pro-Kopf-Energieverbrauch. Es überrascht nicht, dass der Unterschied zwischen HDI und PHDI bei Ländern mit niedrigen HDI-Werten sehr gering ausfällt.

5 Aktueller Stand und Ausblick

Die vorgestellte virtuelle Bibliothek wird im Schulbereich seit Anfang 2021 erprobt. Die interaktiven Visualisierungen der Web-App bieten sich vorzüglich für den Präsenz- oder Distanzunterricht in der Sekundarstufe II an. Schülerinnen und Schüler können elementare statistische Konzepte und Verteilungsmodelle auf mobilen Endgeräten experimentgestützt „ausprobieren“ oder interessante Datensätze explorieren. Experimente und Simulationen lassen sich auch auf digitalen Tafeln vorführen sowie via QR-Code mit Übungsblättern oder – wie bei Mittag und Schüller (2020) bereits realisiert – mit Statistik-Lehrbüchern verknüpfen.

Es ist geplant, die jetzige Sammlung von Lernobjekten auf der Basis von Bedarfsmeldungen aus der Unterrichtspraxis kontinuierlich auszubauen. Die in-

teraktive HDI-Visualisierung kam z. B. auf Wunsch einer mit Vertretern des Unterrichtsfachs „Erdkunde“ besetzten Moderatorengruppe des Regierungsbezirks Arnsberg zustande. Denkbar ist auch die Entwicklung von Fragen und Aufgaben zu den einzelnen Lernobjekten. Rückmeldungen zu Erfahrungen mit dem schulischen Einsatz der Web-App und Anregungen zur Weiterentwicklung sind jedenfalls stets willkommen.

Danksagung: Die Autoren danken den Gutachtern für die kritische Durchsicht des Beitrags und für wertvolle Hinweise.

Literatur

- Binder, K., Krauss, S. & Steib, N. (2018). Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Schnittwahrscheinlichkeiten gleichzeitig visualisieren: Das Häufigkeitsnetz. *Stochastik in der Schule*, 40(2), 2–14.
- Borovcnik, M. (2019). Big Data, Open Data und Zivile Statistik. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, 52, 1–16.
- Engel, J., Biehler, R., Frischmeier, D. et al (2019). Zivilstatistik: Konzept einer neuen Perspektive auf Data Literacy und Statistical Literacy. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 13(3), 213–244.
- Mittag, H.-J. & Schüller, K. (2020). Statistik – eine Einführung mit interaktiven Elementen, 6. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg – Berlin.

Zu den Verfassern:

Prof. Dr. Hans-Joachim Mittag
Burgstr. 24a, 58300 Wetter;
joachim.mittag@fernuni-hagen.de

Prof. Mittag ist Autor der Web-App.
Er lehrte Statistik an der FernUniversität Hagen und war bei Eurostat als nationaler Sachverständiger tätig.

Dr. Tobias Augustin
FernUniversität, Universitätsstr. 1, 58084 Hagen
tobias.augustin@fernuni-hagen.de

Dr. Augustin leitet an der FernUniversität das Center für elektronische Weiterbildung. Er verantwortet die technische Realisierung der Web-App.